流体地球科学 第11回

東京大学 大気海洋研究所 准教授
藤尾伸三
http://ovd.aori.u-tokyo.ac.jp/fujio/2015chiba/
fujio@aori.u-tokyo.ac.jp

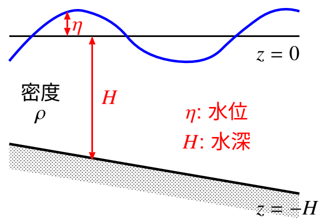
2016/1/8

最終更新日 2016/1/12

順圧流の運動方程式

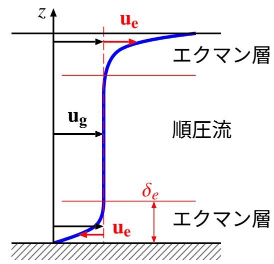
流体の密度が一様ならば, 圧力 (静水圧) の水平勾配は鉛直一様 (海面の高さによる水平圧力勾配のみ)

$$p(x,y,z) = \int_z^{\eta(x,y)} \underbrace{\rho}_{\text{定数}}\, g\, dz = \rho g(\eta - z) \;\rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$



ある時点で流速が鉛直に一様ならば, 流体にかかる力 (加速度) も鉛直に一様
→ その後, 流速は変化しても, 鉛直に一様であることは変わらない

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + K_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + K_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$



- 海底や海面では粘性により力を受ける → エクマン層の外には及ばない
- エクマン層の外の流速は, 鉛直に流速差があっても, 粘性で鉛直一様になる

順圧流 ＝ 水は, 柱のように上下一体となって移動する…水柱 (すいちゅう)

前回のポイント

黒潮や湾流は, (主に) 風が作っている … 風成循環 (⇔ 熱塩循環)

{ 海流は, 地衡流であって, エクマン流ではない.
  強い海流は, 海の西側にある (西岸境界流)

1. 風によって, 表層でエクマン輸送が起きる
   - 風応力に対して直角右向き (北半球) ＝圧力傾度力に対する地衡流と同じ
   - 大きさは, コリオリ係数 f と風応力 τ で決まる…$\tau/\rho f$ (海水の密度 ρ)
2. エクマン輸送の場所による違い (収束・発散) が, 鉛直流を作る
   エクマン湧昇 … $\mathrm{curl}_z(\boldsymbol{\tau}/\rho f)$ ← ベクトルの回転の鉛直成分
   沿岸湧昇, 赤道湧昇 (湧昇は, 栄養塩を表層に供給)

亜熱帯循環系 (北半球で時計回り):
{ 偏西風 (南向きエクマン輸送)
  貿易風 (北向きエクマン輸送) } の間
→ 海面が盛り上がる (下降流)
→ 時計回りの地衡流

亜寒帯循環系 (反時計回り)

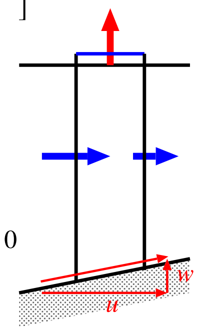
Sverdrup et al. (1942)

なぜ, 海の西側に強い流れができるのか? → 渦度のバランス

海面の高さ (水位) の式

連続の式 (もともとは質量の保存だが, 非圧縮近似により体積の保存)

$$\frac{Dh}{Dt} + h\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{底面積の変化率}} = 0 \quad \left[\text{または}\quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0\right]$$



導出 1　非圧縮でない連続の式 (質量保存) と同じ
{ 水柱が細くなると, 高くなる (ラグランジュ的)
  水が集まると, 水面が盛り上がる (オイラー的)

導出 2　$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を 鉛直に積分

$$\int_{-H}^{\eta} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{z\text{ に関して定数}} + \frac{\partial w}{\partial z}\, dz = \underbrace{(\eta + H)}_{h}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \underbrace{\underbrace{w(\eta)}_{D\eta/Dt} - \underbrace{w(-H)}_{-DH/Dt}}_{Dh/Dt} = 0$$

$\dfrac{DH}{Dt} \neq 0,\ w(-H) \neq 0$ … 水は海底斜面に沿って流れる

$$u : w = \Delta x : -\Delta H$$

$$w(-H) = -u\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{DH}{Dt} = \cancel{\frac{\partial H}{\partial t}} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} = -w(-H)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} = w(\eta)$$

浅水方程式

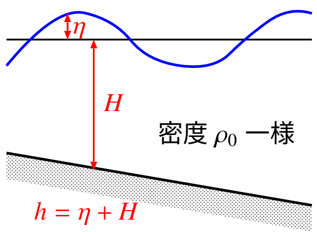
順圧であるためには, 静水圧近似が必要

$$\frac{Dw}{Dt} + \text{コリオリ力} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \text{粘性} - g$$

w が u, v に比べて小さい

→ 運動の水平距離に対して水深が浅い (浅水)

※ 海は深いが, 水平はさらに広い (最大 1 万 km)



浅水方程式: (u, v, h) の式 → 水平 2 次元の解

$$\frac{Dh}{Dt} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

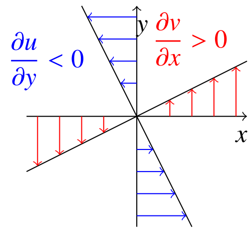
$$\frac{Du}{Dt} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + K_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad \frac{Dv}{Dt} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} + K_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

- 圧力傾度力とコリオリ力 → 地衡流 ⋯ 渦度方程式
- 圧力傾度力と時間変化 → 浅水重力波 (津波など)
  海面から海面まで一緒に前後運動する波

※ 普通に見る波は「深水重力波」(水面付近の水だけ動く)
静水圧平衡になっていないので, 深さ方向に圧力の水平勾配が減少

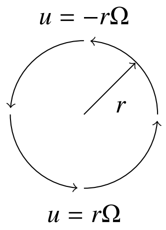
渦度

- 渦度ベクトル⋯速度ベクトルの回転
$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
- 渦度 (渦度ベクトルの鉛直成分)
$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$



剛体回転 (どこも同じ角速度 Ω で回転) の場合,
中心の流体粒子の渦度は, 微小な距離を r として,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{r\Omega - (-r\Omega)}{2r} - \frac{(-r\Omega) - r\Omega}{2r} = 2\Omega$$



渦度は, 流体粒子の自転を表す (自転角速度の 2 倍)
渦度は自転の強さであって, 公転の強さではない

地球も自転している
コリオリ係数 f はその緯度での地球の自転速度の 2 倍
惑星渦度 $f = 2\Omega \sin\phi$

u, v は地面に対する相対速度なので ζ を相対渦度, $\omega = \zeta + f$ を絶対渦度という
(静止系からみた渦度)

渦度方程式

v の式を x で微分したものから, u の式を y で微分したものを引き, η を消去する

$$\text{左辺} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Dv}{Dt} + fu\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Du}{Dt} - fv\right) \qquad \left(※\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\ \text{に注意}\right)$$

$$= \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

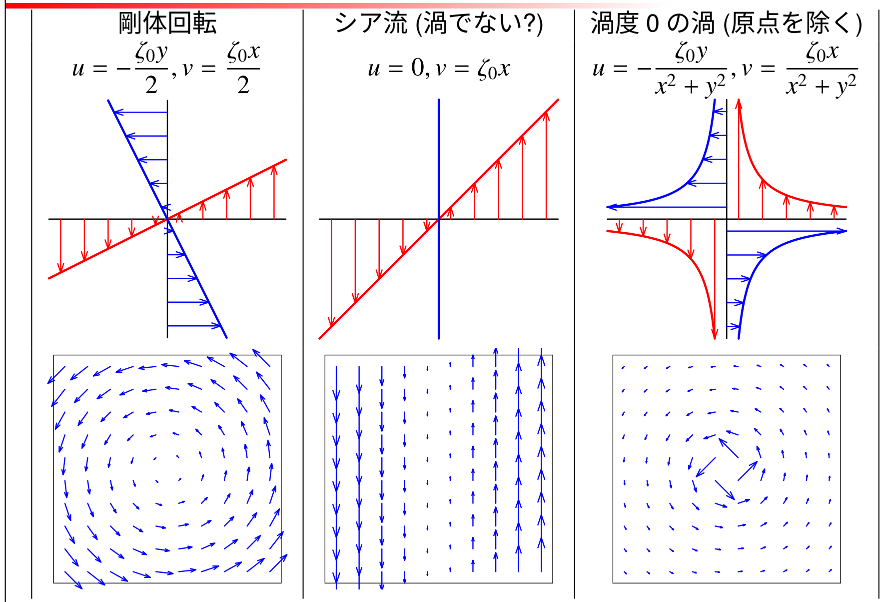
右辺には水平粘性の項が残るが, 一般に, 左辺に比べて小さく, 0 に近似できる.

渦度 $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$ とおけば, $\boxed{\frac{D\omega}{Dt} + \omega\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0}$ ⋯ 渦度の式

連続の式 $\frac{Dh}{Dt} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$ とほぼ同じ形なので,

$$\frac{D\omega}{Dt} - \frac{\omega}{h}\frac{Dh}{Dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega}{h}\right) = 0}$$ ⋯ ポテンシャル渦度 (渦位) の式

渦度の例



惑星渦度と相対渦度

惑星渦度 $f = 2\Omega \sin\phi$ (地面の自転) … 慣性周期
相対渦度 $\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ (地面に対する自転) … 半回転に要する時間

- 剛体回転であれば, 渦度の大きさは周期を比べればよい
  傾度風で行ったことと同じ (質点の遠心力は, 流体では運動量の移流と対応)
  亜熱帯循環系の 1 周 … 数年〜十年 → 相対渦度は極めて小さい
- シア流 (水平に速度勾配がある流れ) だと, 面倒
  緯度 30 度 → f=7.3×10^{-5}s^{-1}
  黒潮 (幅 100km, 最大流速 1m s^{-1}) → $\zeta=\dfrac{\partial v}{\partial x}$=1×10^{-5}s^{-1}

海洋では, 惑星渦度に比べて相対渦度は小さい
要するに, ほぼ地衡流であるということ

- 地衡流にとって重要なのは, コリオリ力そのものではない (すでに圧力傾度力とバランスしている) → 海流がコリオリ力で右に曲がるわけではない
- コリオリ力の変化 (定常状態を考えれば, 水平的な違い) が渦度の変化を生む. 特に, 緯度によるコリオリ力の違いが重要 (ベータ効果)

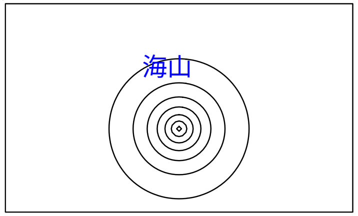
地衡流と f/H

ポテンシャル渦度は移動しても変化しない ⇔ 変化しないように移動する

海面の高さ変化 η に比べて, 水深 H が十分に大きい
相対渦度が惑星渦度よりも十分に小さい (地衡流)
→ $\dfrac{\omega}{h} = \dfrac{\zeta + f}{\eta + H} \approx \dfrac{f}{H}$

※ 地衡流は $\dfrac{f}{H}$ の等値線に沿って流れる. (等圧線と $\dfrac{f}{H}$ が一致する)

f が 一定, H が変化



f が変化, H が一定

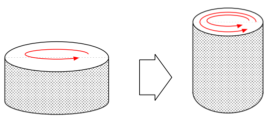
- f に比べて, H の変化が大きい→ 等深線に沿う
  ※ 黒潮 (東シナ海, 日本南岸)
  ・ 海底が盛り上がったり, くぼんだりした場所を迂回して, 流れる
- f に比べて, H の変化が小さい→ 同じ緯度を流れる (緯線に沿う)
  ※ 黒潮続流 (ほぼ東向き, 水温躍層の上)

ポテンシャル渦度

ポテンシャル渦度 (渦位)…渦度を層厚で割ったもの $\dfrac{\omega}{h} = \dfrac{\zeta + f}{\eta + H}$

$\dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{\omega}{h}\right) = 0$ …体積の保存と角運動量 (渦度) の保存から導かれる

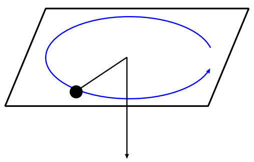
水柱のポテンシャル渦度は保存する (質量や回転が加わらない場合)
時間が経っても別の場所に移動しても, 同じ値



水柱を伸ばせば, 早く回転
早く回転させれば, 水柱は伸びる

水柱が伸びる→鉛直流がある

板に穴をあけ, 通した糸の先のボールを回す

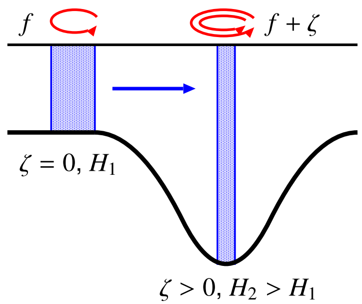


糸を引くと, ボールの回転が速くなる
(海底付近の下降流は渦の回転を速くする)

普通の流体力学 (惑星渦度は相対渦度に比べて無視できる) では $f = 0$
「初期に渦度ゼロならば, ずっと渦度ゼロ」 (流体の厚さは関係しない)

相対渦度

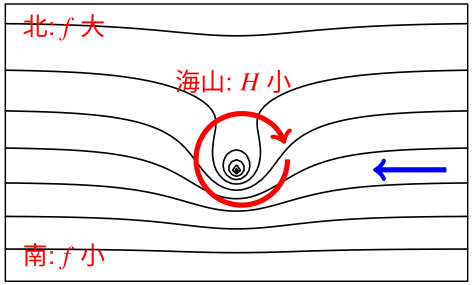
$\dfrac{f+\zeta}{H}$ が変化しないとして ζ を計算.
(H は η に比べて十分に大きい)



- $\zeta = 0$ の水柱が水深 H_1 から水深 H_2 に移動
  水柱のポテンシャル渦度は保存するので
  $\dfrac{f}{H_1} = \dfrac{f+\zeta}{H_2} \quad \rightarrow \quad \zeta = \dfrac{H_2 - H_1}{H_1} f$
  北半球 ($f > 0$) で深い側に移動すると, $\zeta > 0$
  水柱は反時計回りに回転
  (窪地では等深線に沿って反時計回りの流れ)
  逆に, 海山では時計回りの流れ　　※ 常に浅い側を右手に見る (南半球は逆)
- 水深一定で, 水柱が南北に移動する場合
  $f + \zeta$ = 一定 なので, 北に移動する (f が増える) と $\zeta < 0$ → 時計回りの循環

逆に, 相対渦度が 0 でない水柱 (たとえば, $\zeta > 0$) が地衡流に変わるには
浅いところに移動
北に移動
(あるいは, 水平粘性で解消)
↑ 渦度方程式の導出で, 右辺は相対渦度の水平粘性

西向きと東向きの違い



海山がある場合の f/H の等値線
(海山上は周囲よりも f/H が大きい)

水柱は, $\begin{cases} f/H \text{ に沿うと, 海山の南側を流れる} \\ \text{海山に乗り上げると, 海山の回りに時計回りの循環 } (\zeta < 0) \text{ を作る} \end{cases}$

- 西向きの流れ → 両者は整合的であり, スムーズな流れ
- 東向きの流れ → うまく合わない (蛇行する)
  ヒマラヤを越えるジェットストリーム

※ 窪地の場合や南半球の場合でも, 西向きは整合的, 東向きは合わない

鉛直流と渦度

渦度方程式を連続の式を使って w で書き換える.

$$\frac{D\omega}{Dt} + \omega\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \rightarrow \frac{D\omega}{Dt} = \omega\frac{\partial w}{\partial z} = \omega\frac{w(\eta) - w(-H)}{\eta - (-H)} = \frac{\omega}{h}[w(\eta) - w(-H)]$$

※ 順圧流なので, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ は鉛直に変化せず, $\frac{\partial w}{\partial z}$ も鉛直に変化しない.

- 海面付近には, エクマン湧昇 w_e がある $\cdots\ w(\eta) = w_e$
  海面の起伏による鉛直流は無視 $\cdots\ u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$
- 海底の摩擦を考えると, 海底エクマン層にも鉛直流 w_b がある $\cdots w(-H) = w_b$
  水深が変化する場合, 海底では斜面に沿う $\cdots w(-H) = w_b - u\frac{\partial H}{\partial x} - v\frac{\partial H}{\partial y}$

$\omega = \zeta + f$ で書き換えて, 相対渦度の式を作る.

$$\frac{D\zeta}{Dt} + \frac{Df}{Dt} = \frac{\omega}{h}\left(w_e - w_b + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y}\right), \qquad \frac{Df}{Dt} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial f}{\partial x}} + v\frac{\partial f}{\partial y} = \beta v$$

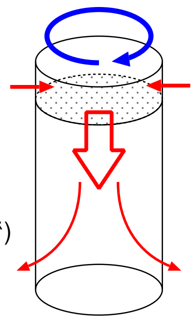
$$\frac{D\zeta}{Dt} - \frac{\omega}{h}\frac{\partial H}{\partial x}u + \left(\beta - \frac{\omega}{h}\frac{\partial H}{\partial y}\right)v = \frac{\omega}{h}(w_e - w_b)$$

コリオリ係数の南北勾配 $\beta = \frac{df}{dy} = \frac{d(2\Omega\sin\phi)}{d(a\phi)} = \frac{2\Omega}{a}\cos\phi > 0$ (a: 地球の半径)

風が渦度を与える場合

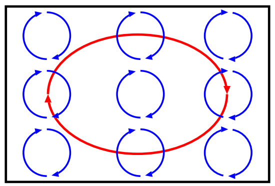
海面に時計回りの風 (負の相対渦度) が吹く

ポテンシャル渦度 $\frac{\omega}{h}$ を考える (北半球)



- エクマン輸送の「収束」が起き,
  負のエクマン湧昇 (下降流) が生じる
- 下層が縮む (横に広がる) → h が減少
- 下層のポテンシャル渦度は不変 (風応力は加わらないので)
  → h が減少しただけ, ω も減る (負の ζ → 時計回り)

・風が渦度をエクマン層に与える.
・エクマン層は, 鉛直流により下層の厚さを変える.
・下層では, 惑星渦度から相対渦度が生まれる



h の変化 ⇔ 鉛直流
鉛直流から渦度変化を計算するための式を導出.

海底エクマン層の鉛直流

海面エクマン層と同じ導出

地衡流を (u, v), エクマン深度 $\delta_e = \pi\sqrt{\frac{2K_V}{|f|}}$ とするとき,

海底エクマン輸送 $U_e = -\frac{\delta_e}{2\pi}(u + v),\ V_e = -\frac{\delta_e}{2\pi}(v - u)$

$$w_b = -\left(\frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = \frac{\delta_e}{2\pi}\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{発散}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{相対渦度}}\right) = \frac{\delta_e}{2\pi}\zeta$$

地衡流 $u = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y}, v = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$ の発散: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (ただし, f 一定)

海底エクマン層の鉛直流は, 相対渦度に比例する

反時計周りの渦 ($\zeta > 0$) = 低気圧性の渦 = 海底エクマン層から上昇流 ($w > 0$)
(海底エクマン流は, 高圧から低圧へ流れる向き)

上昇流は, 上層を縮める → $(f + \zeta)/h$=一定なので, ζ は減少→ 渦が弱くなる
(海面のエクマン層と同じく, 鉛直流によって渦度が伝わる)

渦度方程式 (再)

渦度方程式 ($\omega = f + \zeta \approx f,\ h = H + \eta \approx H$ とする)

$$\frac{D\zeta}{Dt} - \frac{f}{H}\frac{\partial H}{\partial x}u + \left(\beta - \frac{f}{H}\frac{\partial H}{\partial y}\right)v = \frac{f}{H}\left(w_e - \frac{\delta_e}{2\pi}\zeta\right)$$

水深の変化は, コリオリ係数の変化と同じ効果を持つ (地形性ベータ効果)

$\left\{\begin{array}{ll} \text{地形性ベータ} & \alpha_T = -(f/H)(\partial H/\partial x),\ \beta_T = -(f/H)(\partial H/\partial y) \\ \text{惑星ベータ} & \beta = df/dy \end{array}\right.$ ← 場所のみの関数 (浅い⇔高緯度)

$$\frac{D\zeta}{Dt} + \alpha_T u + (\beta + \beta_T)v = \frac{f}{H}\left(w_e - \frac{\delta_e}{2\pi}\zeta\right)$$

水深が変化しない場合

$$\boxed{\frac{D\zeta}{Dt} + \beta v = \frac{f}{H}\left(w_e - \frac{\delta_e}{2\pi}\zeta\right)}$$

水柱の自転 (相対渦度の時間変化)
水柱の南北移動 (惑星渦度の移流)
風のトルク
海底摩擦のトルク (相対渦度の減衰)

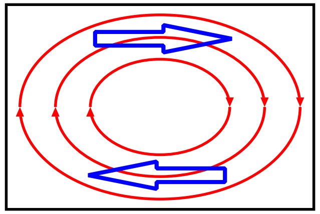
海底エクマン層の鉛直流の計算で地衡流の発散を 0 にした.

$\beta \neq 0$ の場合, 発散 $= -\dfrac{g\beta}{f^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = -\dfrac{\beta v}{f}$ → 渦度方程式 $\dfrac{D\zeta}{Dt} + \left(1 - \dfrac{\delta_e}{H}\right)\beta v = \dfrac{f}{H}\left(w_e - \dfrac{\delta_e}{2\pi}\zeta\right)$

水深 H に比べて, エクマン深度 δ_e (10m ぐらい) が小さいことを仮定しているので, 地衡流の発散による鉛直流は無視できる

風成循環

北半球の亜熱帯循環系 ($w_e < 0,\ \mathrm{curl}_z\,\boldsymbol{\tau} < 0$)



コリオリ係数 f が定数 (地球が平ら, $\beta = 0$)

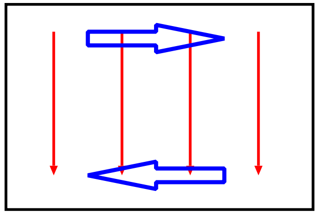
$$\frac{D\zeta}{Dt} + \cancel{\beta v} = \frac{f}{H}\left(w_e - \frac{\delta_e}{2\pi}\zeta\right)$$

- 風により水柱が縮む → 負の相対渦度が増加
  時計回りの循環が形成される
- 負の渦度の循環は, 海底エクマン層では下降流 (発散) を作る.
  → 海面エクマン層の下降流と, 海底エクマン層の下降流が一致するまで, 時計回りの循環が強化される (強い相対渦度)
- 定常状態では, 風が与える渦度と海底摩擦で消える渦度がバランス

$w_e = 10^{-6}$m s^{-1}, $\delta_e/2\pi = 1$ m とすれば, 右辺 0 → $\zeta = 10^{-6}$ s^{-1}

- 惑星渦度 f の大きさ 10^{-4}s^{-1} よりは小さい
- 循環系を半径 1000km (緯度の幅 20 度) の渦だと思えば,
  $\zeta = 2V/R$ → 流速 (V) は 0.5 m s^{-1}
- β の大きさは 10^{-11}m^{-1}s^{-1} なので, H = 1000 m (海底まで流れない) とすれば,
  v = 0.5 m s^{-1} → $\beta v = 5{\times}10^{-12} > fw_e/H = 10^{-13}$ → βv は無視できない

風成循環その 2



●相対渦度 $\zeta = 0$ (完全な地衡流) であれば,
風が与える渦度は惑星渦度の移流とバランス

$$\boxed{\beta v = \frac{fw_e}{H}}$$ (スベルドラップ平衡)

- $w_e < 0$ であれば, $v < 0$ (南向き)
  $w_e = -10^{-6}$m s^{-1}, $f = 10^{-4}$ s^{-1} $\beta = 10^{-11}$m^{-1}s^{-1},
  H = 1000 m ならば, v=−0.01 m s^{-1}

北に流れるはずの, 西岸境界流がない
(水は南に動く一方なので, 海の北側の水がなくなる)

●惑星渦度の移流と海底摩擦による相対渦度の減衰がバランス

$$\beta v = -\frac{\delta_e f}{2\pi H}\zeta$$

- 風が負の渦度を与えるので, 相対渦度 $\zeta < 0$ → v >0 (北向き)
- v = 1 m s^{-1} とすれば, $\zeta = -10^{-4}$s^{-1} (f と同程度)
  この渦度をシア流が作る ($\zeta = \partial v/\partial x = V/L$) ならば, 幅 ($L$) は 10km
  (実際は 100km. δ_e と H の設定がよくないので, ζ が大きくなりすぎた)